Oscilaciones

1. Considere un columpio con un niño montado. Se observa que la amplitud de oscilación del columpio cae un factor 1/*e* después de 8 oscilaciones completas si no se suministra energía mecánica al columpio (en otras palabras, si no lo empujamos). Estímese el factor *Q* para este sistema.

El factor Q se relaciona con la constante de decaimiento τ a través de la igualdad

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{2\pi\tau}{T},$$

siendo T el período que tendríamos sin amortiguamiento. Para poder resolver el problema, nos basta con determinar el cociente τ/T. Para ello, comenzamos por plantear la ecuación para la amplitud de las oscilaciones en presencia de amortiguamiento. Ésta decrece con el tiempo siguiendo la siguiente ley exponencial:

$$A = A_0 e^{-t/(2\tau)}.$$

En el tiempo $t = 0$ la amplitud es A_0. En un tiempo igual a 8 períodos después, la amplitud será

$$A = A_0 e^{-8T/(2\tau)},$$

de modo que el cociente de amplitudes será

$$\frac{A}{A_0} = e^{-8T/(2\tau)} = e^{-4T/\tau}.$$

Afirma el enunciado del problema que, tras 8 períodos, la amplitud se ha reducido en un factor $1/e$, por tanto

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{e} = e^{-1} = e^{-4T/\tau},$$

y resolviendo, podemos obtener τ/T

$$\frac{\tau}{T} = 4.$$

Tan sólo nos queda reemplazar este resultado en la expresión del factor Q:

$$Q = 8\pi \approx 25.1$$

2. (a) Estímese el período de oscilación de los brazos cuando se mueven al andar, con las manos vacías. (b) Repítase el cálculo si la mano lleva un maletín pesado.

(a) Supongamos que la longitud promedio del brazo de un adulto es de $L = 0.8\,\mathrm{m}$, y que puede tratarse como una varilla de densidad uniforme, que puede rotar libremente respecto el hombro. Con esta aproximación, un brazo que oscila se modela por un péndulo físico. Despreciamos además cualquier efecto de amortiguamiento.

Entonces, el periodo vendrá dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}},$$

donde I es el momento de inercia del brazo (varillas) respecto al extremo superior

$$I \approx \frac{1}{3}ML^2,$$

siendo M la masa del brazo, y D es la distancia desde el centro de masas del brazo hasta su extremo superior, y que aproximadamente es la mitad de su longitud

$$D \approx L/2.$$

Sustituyendo todas estas fórmulas en la expresión para el período, obtenemos

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(0.8\,\mathrm{m})}{3(9.81\,\mathrm{m/s^2})}} \approx 1.47$$

(b) Cuando la persona sostiene un maletín pesado, la masa se concentra prácticamente en el centro del maletín. Podemos aproximar entonces el sistema brazo + maletín por un péndulo simple. La longitud del péndulo será ligeramente mayor que el brazo, ya que debemos tener en cuenta que el peso está ahora concentrado en el centro de masas del maletín. Suponiendo que la altura del maletín es de 40 cm, entonces la nueva longitud será

$$L' \simeq L + \frac{0.4\,\mathrm{m}}{2} = 1\,\mathrm{m}.$$

Aplicando ahora la fórmula para el período de un péndulo simple

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m/s^2}}} \simeq 2.01\,\mathrm{s}.$$