Interferencia y difracción

1. Se dice que la Gran Muralla China es el único objeto humano que pude verse desde el espacio. Estúdiese si la afirmación es válida usando el poder resolutivo del ojo humano, si la observación se realiza desde una órbita cercana ($\sim$ 400 km de altitud) y desde la Luna.

Supóngase que el diámetro D de la pupila del ojo es de 5 mm y la longitud de onda λ de la luz es de 600ñm, la menor diferencia angular que el ojo es capaz de separar cumple:

$$\alpha_c = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Por otro lado, la anchura angular α de un objeto de tamaño w observado a una gran distancia h cumple:

$$\tan\alpha = \frac{w}{h}$$

Para obtener el tamaño mínimo de un objeto que pueda ser resuelto desde una altura h no hay más que igualar los dos ángulos y se obtiene:

$$w = h\tan\left(1{,}22\frac{\lambda}{D}\right) = (400\text{ km})\tan\left(1{,}22\frac{600\text{ nm}}{5\text{ mm}}\right) = 58{,}6\text{ m}$$

De esta forma, el objeto de menor tamaño que puede apreciarse a simple vista verse desde una órbita cercana es de 48.6 km.

Como el ancho de la Gran Muralla China es de aproximadamente 5 m, ni desde una órbita cercana ni desde la Luna puede observarse a simple vista la Gran Muralla China.

2. Algunas veces pueden verse coronas naturales (anillos brillantes de colores) al rededor del Sol o la Luna cuando se observan a través de nubes finas. Estas coronas son debidas al a difracción de la luz por las pequeñas gotas de agua de las nubes. Un tamaño angular típico de estas coronas es de unos 10°. A partir de esto, estímese el tamaño de las gotas de agua en las nubes. Supóngase que las gotas de agua pueden modelarse como discos opacos del mismo radio que la gota de agua, y que el patrón de difracción por un disco opaco es el mismo que el patrón de difracción por un orificio circular del mismo diámetro. (Esta afirmación se conoce como Principio de Babinet.)

El ángulo de la corona se puede relacionar con la longitud de onda y el diámetro de las gotas mediante la expresión:

$$\operatorname{sen}\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

que para ángulos pequeños queda:

$$\theta \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Por tanto, el valor del diámetro de las gotas queda:

$$D = \frac{1{,}22\lambda}{\theta} = \frac{1{,}22(500\text{ nm})}{10^\circ \times \frac{\pi\text{ rad}}{180^\circ}} = \boxed{3{,}50\ \mu\text{m}}$$

3. Se pude crear una corona artificial (ver el problema 2) colocando una suspensión de poliestireno en agua. Las microesferas de poliestireno son esferas pequeñas, uniformes, hechas de plástico de índice de refacción 1,59. Suponiendo que el índice de refracción del agua es 1,33, ¿cuál es el diámetro angular de la corona artificial si el diámetro de las microesferas es 5 μm y son iluminadas con una luz de un láser de helio-neón de longitud de onda en el aire de $\boldsymbol{\lambda} = 632{,}8$nm?

El ángulo que se difracta la luz debido a las microesferas de poliestireno cumple:

$$\operatorname{sen}\theta = 1{,}22\frac{\lambda_{\text{agua}}}{D}$$

donde λ_{agua} es la longitud de onda de la luz láser en agua, que se relaciona con la del aire λ de forma sencilla, ya que $\lambda_{\text{agua}} = \lambda/n$, donde n es el índice de refracción del agua. Como el ángulo es muy pequeño, el seno se puede aproximar por el ángulo y queda:

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{nD} = \frac{1{,}22\,(632{,}8 \text{ nm})}{1{,}33\,(5\ \mu\text{m})} = \boxed{0{,}116 \text{ rad}}$$

4. Ciertas coronas (ver problema 13) pueden ser causadas por granos de polen, generalmente de abedul o pino. Estos granos tiene forma irregular, pero pueden tratarse como si tuvieran de meda un diámetro aproximado de 25μm. ¿Cuál es el ángulo de la corona formada por la red roja y para la luz azul?

Usando la fórmula del ángulo de difracción por un objeto circular se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Para ángulos pequeños el seno del ángulo puede aproximarse por el mismo ángulo, y quedaría:

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Sustituyendo los valores para la luz roja se tiene:

$$\theta_{\text{roja}} = \frac{1{,}22(650 \text{ nm})}{(25\ \mu\text{m})} = \boxed{3{,}17 \times 10^{-2} \text{ rad}}$$

Sustituyendo los valores para la luz azul se tiene:

$$\theta_{\text{azul}} = \frac{1{,}22(450 \text{ nm})}{(25\ \mu\text{m})} = \boxed{2{,}20 \times 10^{-2} \text{ rad}}$$

5. El pelo diámetro de un pelo humano es aproximadamente de unos 70μm. Si se ilumina un pelo usando un láser de helio-neón de longitud de onda $\boldsymbol{\lambda} = 632{,}8$nm y se intercepta la luz disipada por el pelo en una pantalla a 10m de distancia, ¿cuál será la separación entre el primer pico de difracción y el centro? (El patrón de difracción de un pelo de diámetro d es similar al patrón de difracción de una rendija de anchura $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$.)

Los máximos de un patrón de difracción de una rendija de anchura a ocurren a ángulos θ que cumplen:

$$\operatorname{sen}\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{a}$$

El ángulo θ se relaciona con la distancia L de la pantalla y la altura h sobre el centro de ésta como:

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones se puede obtener la altura y como:

$$y = L\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}{a}\right)\right)$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$y = (10\ \text{m})\tan\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)(632{,}8\ \text{nm})}{(70\ \mu\text{m})}\right)\right) = \boxed{300\ \text{nm}}$$