Imágenes ópticas

1. La ecuación de la potencia de una lente delgada contiene tres parámetros de diseño, el índice de refracción de la lente y los radios de curvatura de las dos superficies. Por tanto, existen muchas maneras de diseñar una lente con una determinada distancia focal. Úsese la ecuación de la focal de las lentes delgadas para diseñar tres lentes delgas convergentes, todas con distancia focal imagen de 27 cm y todas hechas de un cristal de índice de refracción 1.6. Dibújese un esquema de cada uno de los diseños.

Mediante la ecuación de focal de una lente delgada se pueden relacionar los tres parámetros mencionados:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Sustituyendo valores, se tiene:

$$\frac{1}{27\text{ cm}} = (1{,}6-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{16{,}2\text{ cm}}$$

Una posible solución sería una lente plano convexa (con una de las superficies planas). Si se hace $r_2 = \infty$, la primera superficie tendría un radio $r_1 = 16{,}2$ cm. La solución de este diseño sería:

$$\boxed{r_1 = 16{,}2\text{ cm y } r_2 = \infty}$$

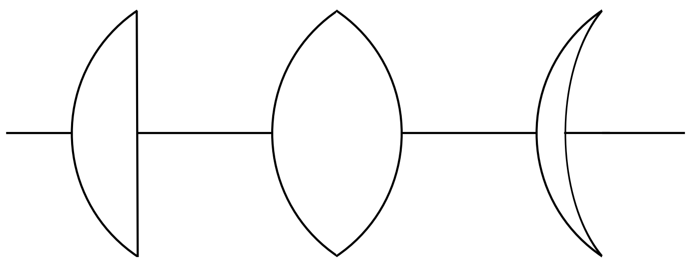
Otro posible diseño sería una lente equiconvexa (ambas superficies son convexas y de igual radio). En este caso $r_1 = -r_2$, por lo que la ecuación queda:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r_1} = \frac{1}{16{,}2\text{ cm}} \Rightarrow \boxed{r_1 = -r_2 = 32{,}4\text{ cm}}$$

Por último, otra posible solución es una lente cóncava-convexa, de distinta curvatura. En este caso se fija uno de los radios, por ejemplo $r_2 = 12$ cm, y la curvatura se obtiene de sustituir en la fórmula, que en este caso resulta $r_1 = 6{,}89$ cm. El resultado en este caso sería:

$$\boxed{r_1 = 6{,}89\text{ cm y } r_2 = 12\text{ cm}}$$

En la siguiente figura se esquematizan los tres diseños.



2. Repetir el problema 1, pero para lentes divergentes de focal -27 cm.
En este caso, la ecuación de la focal image de la lente delgada queda, sustituyendo valores:

$$\frac{1}{-27 \text{ cm}} = (1{,}6 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{-16{,}2 \text{ cm}}$$

Una primera posible solución sería una lente plano cóncava (con una de las superficies planas y la otra cóncava). Si se hace $r_2 = \infty$, la primera superficie tendría un radio $r_1 = -16{,}2$ cm. La solución de este diseño sería:

$$\boxed{r_1 = -16{,}2 \text{ cm y } r_2 = \infty}$$

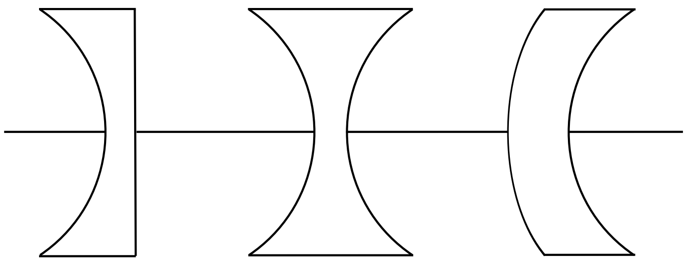
Otro posible diseño sería una lente equicócava (ambas superficies son cóncavas y de igual radio). En este caso $r_1 = -r_2$, por lo que la ecuación queda:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r_1} = \frac{1}{-16{,}2 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{r_1 = -r_2 = -32{,}4 \text{ cm}}$$

Por último, otra posible solución es una lente convexa-cóncava, de distinta curvatura. En este caso se fija uno de los radios, por ejemplo $r_2 = 8{,}1$ cm, y la curvatura se obtiene de sustituir en la fórmula, que en este caso resulta $r_1 = 16{,}2$ cm. El resultado en este caso sería:

$$\boxed{r_1 = 16{,}2 \text{ cm y } r_2 = 8{,}1 \text{ cm}}$$

En la siguiente figura se esquematizan los tres diseños.



3. Estímese el máximo aumento angular que puede tener una lupa que pueda usarse en la práctica. (Ayuda: Piénsese en la menor distancia focal que una lente hecha de vidrio puede tener, de forma que puede usarse como lupa.)
El aumento angular M de una lupa en función del punto próximo del ojo x_{np} (el punto más cercano al ojo donde se puede colocar un objeto y conseguir que el ojo forme una imagen enfocada) y la focal imagen f' de la lente viene dado por:

$$M = \frac{x_{\text{np}}}{f'}$$

Por otro lado, la focal imagen de una lente se obtiene a partir de la ecuación:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Si se supone una lente convexo-plana $r_2 = \infty$ se tiene:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{r_1} \Rightarrow f' = \frac{r_1}{n-1}$$

Sustituyendo en la expresión del aumento lateral se obtiene:

$$M = \frac{x_{\mathrm{np}}(n-1)}{r_1}$$

Se puede observar que mientras menor sea r_1, mayor será M. Por tanto, el mayor aumento se conseguirá con la lupa de menor radio que pueda construirse y sea útil. Un valor razonable para el menor radio que puede tener una lupa es 1 cm, y la distancia del punto próximo del ojo es 25 cm, con lo que el máximo aumento angular es:

$$M = \frac{(1{,}5-1)(25\ \mathrm{cm})}{1\ \mathrm{cm}} = \boxed{12{,}5}$$