Gravedad

1. Estímese la masa de la galaxia si el Sol orbita alrededor del centro de la galaxia con un período de 250 millones de años a una distancia media de 30000 años-luz. Exprese la masa en términos de la masa del Sol. (Para realizar este problema, desprecie la masa de las estrellas que se encuentran más lejos que el Sol del centro de la galaxia, y asuma que todas las estrellas más cercanas ejercen la misma fuerza sobre el Sol que una masa puntual que concentre toda sus masas en el centro de la galaxia).

Usemos la Tercera Ley de Kepler, que relaciona el período de rotación del Sol, *T*, con su distancia media al centro de la galaxia, *r*

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Galaxia}} r^3 \qquad \Rightarrow \qquad M_{Galaxia} = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3$$

Introduzcamos los valores numéricos, empleando el sistema internacional (aunque quizás este no es el más adecuado, dadas las cantidades tan grandes que estamos usando…)

$$T = 250\times10^6 \text{años} \frac{365\,\text{días}}{1\,\text{años}} \frac{86400\,\text{s}}{1\,\text{días}} = 7.884\times10^{15}\,\text{s}$$

$$r = 3\times10^4 \text{ años-luz} = (3\times10^4)(3\times10^8 \text{ m/s})(86400\,\text{s})(365) \approx 2.838\times10^{20} \text{ m}$$

Así pues,

$$M_{Galaxia} = \frac{4\pi^2}{(6.67\times10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2})(7.884\times10^{15}\text{s})^2} (2.838\times10^{20}\text{ m})^3 = 2.18\times10^{41}\text{ kg}\,.$$

Y expresando esta masa en términos de la masa solar ($M_{Sol} = 2\times10^{30}$ kg)

$$M_{Galaxia} = 1.09\times10^{11} M_{Sol}\,.$$

2. Uno de los grandes descubrimientos de la astronomía en los últimos años es la detección de planetas fuera del sistema solar. Desde 1996, se han encontrado más de 100 orbitando alrededor de estrellas que no son el Sol. Aunque estos planetas no pueden observarse directamente, los telescopios sí pueden detectar, haciendo uso del efecto Doppler, pequeños movimientos periódicos de la estrella. Esto es debido a que la estrella y su planeta vecino orbitan alrededor del centro de masas común. La masa de la estrella puede determinarse a partir de su luminosidad. Iota Draconis es la octava estrella más brillante de la constelación del dragón. Las observaciones muestran que alrededor de esta estrella hay un planeta orbitando

con un período de 1.5 años. La masa de Iota Draconis es 1.05M_{Sol}. (a) ¿Cuál es el tamaño del semieje mayor de la órbita del planeta? (b) La velocidad radial de la estrella varía en 592 m/s. Usando la conservación del momento lineal, dedúzcase la masa del planeta, suponiendo que la órbita es circular, y exprésela en términos de la masa de la Tierra (masa de la Tierra = 6×10^{24} kg).

(a) De nuevo aquí hacemos uso de la Tercera Ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Iota\ Draconis}} r^3,$$

y despejando r

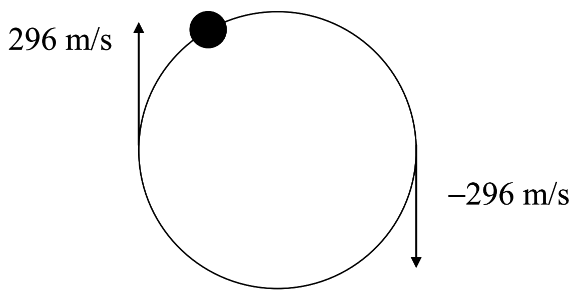
$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_{Iota\ Draconis}T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(6.67\times10^{-11})(1.05)(2\times10^{30})(1.5\times365\times86400)^2}{4\pi^2}} \approx 2\times10^{11}\,\mathrm{m}.$$

Es decir, el planeta se encuentra a una distancia de 200 millones de kilómetros.

(b) Si despreciamos las otras fuerzas gravitatorias actuando sobre el sistema formado por planeta+estrella, podemos suponer que es un sistema aislado, por lo que el momento lineal total será nulo. Esto significa que el vector momento del planeta debe ser de igual módulo y dirección que el de la estrella, pero con sentidos opuestos. Así pues,

$$M_{Iota\ Draconis}V = mv \quad \Rightarrow \quad m = \frac{V}{v} M_{Iota\ Draconis}. \qquad (2.1)$$

Sabemos además que la velocidad de la estrella varía en 592 m/s. Esta variación corresponde a la diferencia de velocidad cuando la estrella se acerca hacia la Tierra y se aleja en la rotación provocada por el efecto gravitatorio del planeta. Por tanto, la velocidad lineal de la estrella respecto al centro de masas estrella-planeta será aproximadamente la mitad, $V = 296$ m/s.



Para obtener la velocidad lineal del planeta, suponemos que su trayectoria es circular (y por tanto a velocidad constante) de radio igual a r

$$v \approx \omega r = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(2\times10^{11}\,\mathrm{m})}{1.5\times365\times86400\,\mathrm{s}} \approx 2.66\times10^{4}\ \mathrm{m/s}\,.$$

Con todos estos datos ya podemos estimar la masa del planeta usando la ecuación 2.1:

$$m = \frac{296\,\mathrm{m/s}}{2.66\times10^{4}\ \mathrm{m/s}}1.05M_{Sol} = 2.34\times10^{28}\ \mathrm{kg} \approx 3890M_{Tierra}\,.$$

3. Uno de los problemas sin resolver más importantes sobre la teoría de la formación del sistema solar es que, mientras que el Sol representa el 99.9% de toda la masa del sistema solar, tan sólo porta un 2% de todo el momento angular del sistema. La teoría más aceptada se basa en la hipótesis central de que el sistema solar se formó tras el colapso de una nube de polvo y gas bajo la acción de la gravedad, y acumulándose esa masa principalmente en el Sol. Sin embargo, debido a que el momento angular neto de la nube debe conservarse, una teoría simple indicaría que el Sol debería estar rotando a una velocidad angular mucho mayor que la real. En este problema vamos a comprobar por qué es tan importante el momento angular transferido a los planetas. (a) El Sol es una nube de gas que se mantiene cohesionada por la fuerza de la gravedad. Si el Sol rotase muy rápido, la gravedad no podría mantener junto toda su masa. Usando los datos de la masa y radio del Sol (2×10^{30} kg y 6.96×10^{8} m, respectivamente), estímese la velocidad angular máxima que el Sol podría alcanzar permaneciendo intacto ¿Cuál es período de rotación correspondiente a esa velocidad angular? (b) Calcule el momento orbital angular de Júpiter y Saturno a partir de sus masas (318 y 95.1 veces la masa de la Tierra, respectivamente), de sus distancias medias al Sol (778 y 1430 millones de km, respectivamente), y de sus períodos orbitales (11.9 y 29.5 años, respectivamente). Compare los valores con el valor experimental para el momento angular del Sol, 1.91×10^{41} kgm^2/s. (c) Si fuésemos capaces de transferir todo el momento angular de Júpiter y Saturno al Sol, ¿cuál sería en nuevo período de rotación del Sol? Téngase en cuenta que el Sol no es una esfera uniforme de gas, así que su momento de inercia viene dado por la fórmula $I = 0.059MR^2$. Compárelo con el obtenido en el apartado (a).

(a) Apliquemos la ley de la gravitación de Newton para estimar la máxima velocidad angular que el Sol pueda mantenerse cohesionado. Esto ocurrirá cuando la fuerza centrífuga que actúa sobre cualquier porción de masa del Sol sea menor que la fuerza de gravedad. Así, si tomamos una porción de masa *m* a distancia *r* del centro, la cohesión estará garantizada para esta masa si

$$m\omega^2 r < G\frac{M_{dentro}m}{r^2} \quad\Rightarrow\quad \omega^2 r < G\frac{M_{dentro}}{r^2}\,,$$

donde M_{dentro} es la masa de Sol encerrada dentro de una esfera de radio r centrada en su centro. Aplicando esta fórmula al radio del Sol, R, tenemos que

$$\omega^2 R < G\frac{M_{Sol}}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 < \sqrt{G\frac{M_{Sol}}{R^3}},$$

y reemplazando los valores numéricos

$$\omega < \omega_{\max} = 6.28\times10^{-4}\ \text{rad/s}.$$

El período asociado a esta velocidad angular máxima es

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi}{6.28\times10^{-4}\ \text{s}^{-1}} = 10^4\,\text{s} = 2.78\,\text{horas}.$$

Si el Sol rotase al ritmo de una vuelta cada 2.78h, el gas que lo constituye escaparía porque la gravedad no sería capaz de compensar la fuerza centrífuga.

(b) Despreciamos aquí el momento angular de rotación de los planetas sobre sí mismos, ya que es una cantidad pequeña en comparación con el momento angular de giro en torno al Sol. Calculémoslo paso a paso para Júpiter. El momento angular de Júpiter es

$$L_J = m_J r_J v_J,$$

y su velocidad lineal se puede escribir en función del radio y período de su órbita (que aproximaremos por circular)

$$v_J = \frac{2\pi r_J}{T_J}.$$

Uniendo ambas ecuaciones

$$L_J = \frac{2\pi m_J r_J^2}{T_J} = \frac{2\pi(318 m_T) r_J^2}{T_J} = \frac{2\pi(318)(5.98\times10^{24}\,\text{kg})(778\times10^{19}\,\text{m})^2}{11.9\times365\times86400\,\text{s}} =$$
$$= 1.93\times10^{43}\,\text{kgm}^2/\text{s}$$

Análogamente, para Saturno se obtiene

$$L_J = 7.85\times10^{42}\,\text{kgm}^2/\text{s}.$$

Comparando el momento angular del Sol con el de estos planetas

$$\frac{L_{Sol}}{L_J + L_S} = \frac{1.91\times10^{41}\,\text{kgm}^2/\text{s}}{(7.85+19.3)\times10^{42}\,\text{kgm}^2/\text{s}} = 0.00703 = 0.703\%,$$

que es una proporción realmente baja.

(c) Si transferimos el momento angular de Júpiter y Saturno al Sol, el momento angular final del Sol será la suma de los tres valores anteriores

$$\begin{aligned} L_f &= 1.91\times10^{41}\ \text{kgm}^2/\text{s} + 1.93\times10^{43}\ \text{kgm}^2/\text{s} + 7.85\times10^{42}\ \text{kgm}^2/\text{s} \\ &= 2.7341\times10^{43}\ \text{kgm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Entonces, su velocidad angular vendrá dada por

$$\omega_f = \frac{L_f}{I_{Sol}} = \frac{L_f}{0.059 M_{Sol} R^2} = \frac{2.7341\times10^{43}\ \text{kgm}^2/\text{s}}{0.059(2\times10^{30}\ \text{kg})(6.96\times10^{8}\ \text{m})^2} \approx 4.8\times10^{-4}\ \text{rad/s}$$

Nótese que este valor es aproximadamente el 76% de la velocidad angular máxima que podría soportar el Sol sin disociarse.