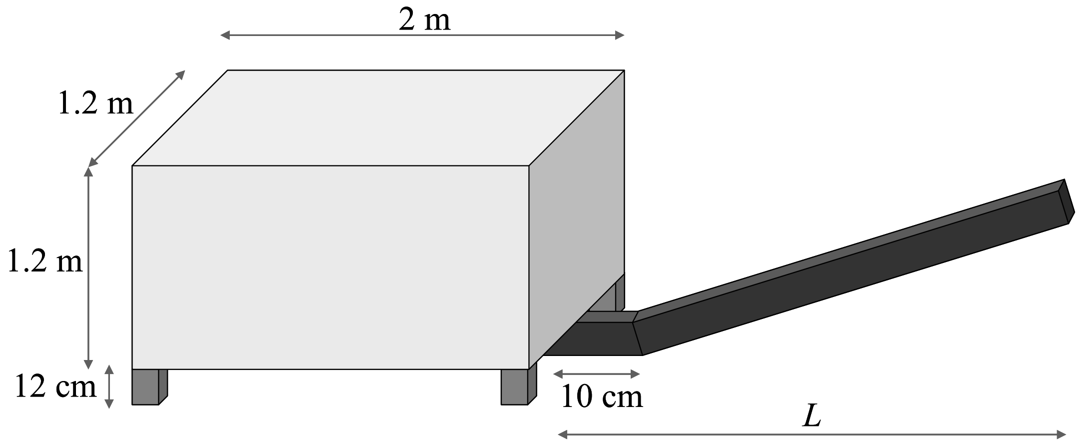
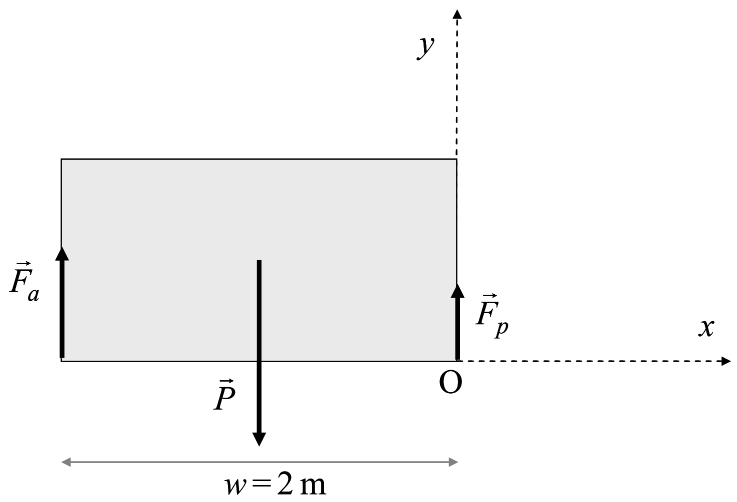
# Estática y elasticidad

**1. Un caja grande de 4500 N de peso descansa sobre cuatro cloques de 12 cm de altura, colocados en sus esquinas. La caja mide 2 m de largo, 1.2 m de ancho y 1.2 m de alto. Se desea levantar uno de los lados más cortos usando una barra de acero a modo de palanca. Dicha barra posee la forma que se indica en la figura, siendo 10 cm la longitud del extremo doblado. Estímese la longitud de la barra necesaria para que una persona pueda elevar uno de los lados de la caja.**




Empecemos por dibujar un diagrama con todas las fuerzas que hay actuando sobre la caja cuando es elevado por el extremo de la derecha. Tenemos por un lado el peso, $P$, aplicado sobre el centro de masas de la caja, tenemos la fuerza que ejerce la palanca en el extremo derecho, $F_p$, actuando vertical hacia arriba, y la fuerza que ejercen los 2 apoyos de las esquinas en el lado derecho, $F_a$. Tomando el punto de contacto de la caja con la palanca, O, como origen del sistema de referencia, el diagrama de las fuerzas externas aplicadas sobre la caja es



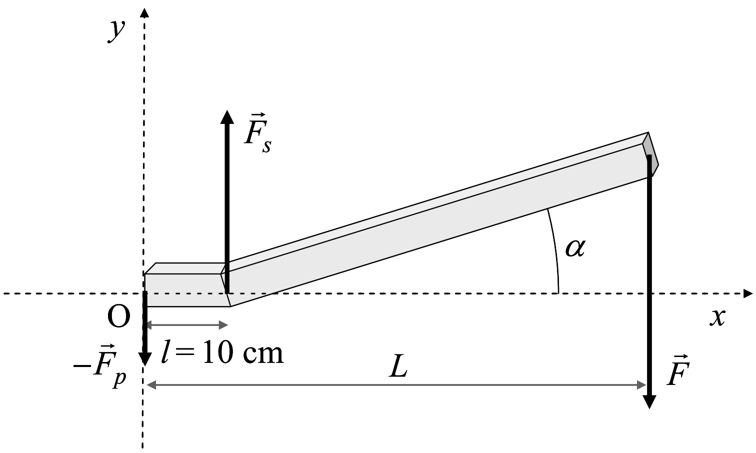
A partir de este esquema es sencillo aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, tomando el punto O como origen:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad F_p + F_a - P = 0 \\ \sum M_{0,z} = 0 \quad &\Rightarrow \quad -wF_a + \frac{w}{2}P = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos la fuerza que ejercen los bloques de la izquierda y la palanca

$$F_a = \frac{P}{2} \quad , \quad F_p = \frac{P}{2}. \tag{1.1}$$

Análogamente, si ahora prestamos atención a la palanca, tenemos a su vez las siguientes fuerzas. La reacción de la caja sobre la palanca en el punto de contacto, O. Esta fuerza es de igual módulo y directriz que $F_p$, pero de signo opuesto. Tenemos también la fuerza de reacción que ejerce el suelo sobre la barra, justo en el punto en la que se dobla, $F_s$, que actúa verticalmente hacia arriba y tenemos también la fuerza que ejerce la persona sobre el extremo de la derecha, hacia abajo, $F$. (Nota: se desprecia el peso de la palanza).




Ahora necesitamos realizar algunas suposiciones y aproximaciones para resolver el problema. Por un lado, asumiremos la fuerza que puede ejercer una persona es de aproximadamente 600 N. En el enunciado del problema no se indica el valor del ángulo $\alpha$, así que supondremos que es muy pequeño y lo consideraremos prácticamente cero.

De nuevo podemos aplicar las ecuaciones de la Estática al equilibrio de la palanca, tomando el punto O como origen de momentos:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad F_s - F_p - F = 0 \\ \sum M_{0,z} = 0 \quad &\Rightarrow \quad lF_s - LF = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Usando l a ecuación 1.1:

$$\left.\begin{array}{lcl}\sum F_y = 0 & \Rightarrow & F_s - \dfrac{P}{2} - F = 0 \\ \sum M_{0,z} = 0 & \Rightarrow & lF_s - LF = 0\end{array}\right\}, \qquad (1.2)$$

de donde, despejando de la segunda igualdad de 1.2

$$F_s = \frac{L}{l}F\,,$$

y sustituyendo en la primera y despejando la longitud $L$

$$\frac{L}{l}F - \frac{P}{2} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad L = l\left(1 + \frac{P}{2F}\right).$$

Tan sólo queda usar los valores numéricos del eneunciado

$$L = (0.1\,\mathrm{m})\left(1 + \frac{4500\,\mathrm{N}}{2\times 600\,\mathrm{N}}\right) = 0.475\,\mathrm{m} = 47.5\,\mathrm{cm}\,.$$

Es decir, es necesario que como mínimo la barra mida 47.5 cm para que una persona pueda levantar la caja, independientemente de cuáles sean sus dimensiones.

**2. Considérese el siguiente modelo microscópico para explicar el módulo de Young. Asumamos que tenemos un gran número de átomos ordenados en una red cúbica, separados entre sí por una distancia interatómica *a*. Imaginemos que cada átomo se encuentra unido a 6 vecinos cercanos por pequeños resortes de constante elástica *k*. (En la realidad los átomos no se encuentran unidos por muelles, aunque este modelo es una buena aproximación: la aproximación armónica). (a) Demuéstrese que este material, si se estira, tendrá un módulo de Young que vendrá dado por $Y = k/a$. (b) Asumiendo que $a \approx 1$ nm, obtenga una estimación para la constante elástica *k* en el caso de un metal.**

Podemos hallar una expresión para el módulo de Young imaginando que aplicamos una fuerza de tensión sobre un área $A$ de cierto material, expresando la fuerza que cada resorte ejerce, encontrando el cambio en la longitud de los resortes, y finalmente sustituyendo en la expresión que define del módulo de Young.

**(a)** El módulo de Young viene dado por la siguiente fórmula:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L / L}\,.$$

El cambio en la longitud de cada muelle se calcula usando la fórmula de Hooke:

$$\Delta L_m = \frac{F_m}{k}, \tag{2.1}$$

donde $F_m$ es la fuerza que ejerce uno de los muelles como resultado de aplicar la fuerza $F$ sobre el área $A$. Llamemos $N$ al número de muelles que están colocados justo en la superficie. Asumiendo que la fuerza $F$ se reparte homogéneamente en toda la superficie, tenemos que

$$F = NF_m \quad \Rightarrow \quad F_m = \frac{F}{N}. \tag{2.2}$$

Si el material es homogéneo, entonces

$$A = Na^2 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{A}{a^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación 2.2

$$F_m = \frac{Fa^2}{A}$$

y sustituyendo de nuevo, pero ahora en la ecuación 2.1, obtenemos

$$\Delta L_m = \frac{Fa^2}{Ak}.$$

Asumiendo ahora que los resortes se extienden/comprimen linealmente

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L_m}{a} = \frac{1}{a}\frac{Fa^2}{kA} = \frac{Fa}{kA}.$$

El módulo de Young será, según este modelo

$$Y = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{Fa}{kA}} = \frac{k}{a}.$$

**(b)** Usando el resultado del apartado (a)

$$k = Ya$$

Para metales, el módulo de Young toma valores próximos a $Y \approx 2\times10^{11}$ N/m$^2$; considerando que $a \approx 1$ nm

$$k = Ya = (2\times10^{11}\,\text{N/m}^2)(10^{-9}\,\text{m}) = 200\,\text{N/m}.$$