Conservación del momento angular

1. Un patinador profesional empieza una pirueta con sus brazos abiertos en cruz, rotando a una velocidad angular de 1.5 rev/s. Estímese la velocidad de rotación cuando cierra sus brazos, pegándolos al suelo.

Podemos aprovechar los resultados del problema 25 del capítulo 9, donde es estimó que el cociente entre los momentos de inercia del patinador respecto del eje vertical que pasa por el centro del cuerpo, cuando los brazos están abiertos y pegados al cuerpo, es

$$\frac{I_{abiertos}}{I_{pegados}} = 6.35\,.$$

Por otro lado, la conservación del momento angular impone que los momentos angulares antes y después de cerrar los brazos sean los mismos, por tanto

$$L_{abiertos} = L_{pegados} \quad \Rightarrow \quad I_{abiertos}\omega_{abiertos} = I_{pegados}\omega_{pegados}\,,$$

de donde, despejando

$$\omega_{pegados} = \frac{I_{abiertos}}{I_{pegados}}\omega_{abiertos} = (6.35)\cdot(1.5\,\text{rev/s}) = 9.525\,\text{rev/s}\,.$$

2. Los casquetes polares contienen aproximadamente 2.3×10^{19} kg de hielo. Su masa prácticamente no contribuye al momento de inercia de la Tierra porque están colocados en los polos, cerca de los ejes de rotación. Estímese el cambio en la duración del día que podría esperarse si todo el hielo de los casquetes polares se fundiesen y toda el agua se distribuyese uniformemente sobre la superficie de la Tierra. (El momento de inercia de una corteza esférica delgada de masa *m* y radio *r* es $2mr^2/3$; el momento de inercia de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro es $2mr^2/5$; la masa de la Tierra es $M = 6\times10^{24}$ kg).

Nos piden calcular el cambio que se produce en el período de la Tierra, ΔT, cuando se produce un cierto aumento del momento de inercia ΔI. Para ello, empezamos por plantear la ecuación para el período cuando los polos no se han fundido

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,.$$

El momento angular es

$$L_0 = I_0\omega_0 \,,$$

luego

$$T_0 = \frac{2\pi I_0}{L_0}. \tag{2.1}$$

Cuando los polos se funden y se reparten por toda la superficie de la esfera, varía el período y el momento de inercia. Sin embargo, es un proceso que transcurre conservándose el momento angular total de la Tierra. Así pues, el momento angular cuando se han fundido los polos es el mismo que el inicial, $L = L_0$. El período entonces viene dado por

$$T = \frac{2\pi I}{L} = \frac{2\pi I}{L_0} \,,$$

y usando la ecuación 2.1

$$T = \frac{2\pi I}{2\pi I_0} T_0 = \frac{I}{I_0} T_0$$

El cambio en el tiempo de rotación de la Tierra es

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{I}{I_0} T_0 - T_0 = \frac{I - I_0}{I_0} T_0 = \frac{\Delta I}{I_0} T_0$$

siendo ΔI el cambio de momento de inercia, que es justamente el ocasionado por la fusión de los polos. Usando los datos de los que disponemos en el enunciado del problema, y teniendo en cuenta que 1 día = 86400 s, llegamos finalmente a la solución:

$$\Delta T \approx \frac{\frac{2}{3} m r^2}{\frac{2}{5} M r^2} T_0 = \frac{5m}{3M} T_0 = \frac{5}{3} \frac{2.3\times 10^{19}\,\mathrm{kg}}{6\times 10^{24}\,\mathrm{kg}} (86400\,\mathrm{s}) = 0.552\,\mathrm{s}$$

3. Una partícula de masa 2 g se mueve a una velocidad constante de 3 mm/s trazando una trayectoria circular de radio 4 mm. (a) Encuentre la magnitud el momento angular de la partícula. (b) Si el momento angular es $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, donde *l* es un número entero, calcule el valor aproximado de *l*. (c) Explique el motivo por el cual la cuantización del momento angular no se observa en la física macroscópica.

(a) Usando la definición de momento angular

$$L = mvr = (2\times 10^{-3}\,\mathrm{kg})(3\times 10^{-3}\,\mathrm{m/s})(4\times 10^{-3}\,\mathrm{m}) = 2.4\times 10^{-8}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

(b) Resolvamos la ecuación cuántica del momento angular:

$$l(l+1) = l^2 + l = \frac{L^2}{\hbar^2} = \left(\frac{2.4\times10^{-8}\,\mathrm{kg\,m^2/s}}{1.05\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}\right)^2 = 5.22\times10^{52}$$

Este valor es astronómicamente grande, lo cual significa que el número cuántico l también deberá ser muy grande, y entonces $l^2 \gg l$. Podemos aprovechar este hecho para despreciar de la ecuación anterior el sumando lineal con l, de modo que

$$l^2 \approx 5.22\times10^{52} \qquad \Rightarrow \qquad l \approx 2.29\times10^{26}$$

(c) La cuantización del momento angular no se observa a escala macroscópica porque no existe ningún experimento capaz de discernir entre $l = 2\times10^{26}$ y $l = 2\times10^{26}+1$.

4. Los púlsares son estrellas que emiten pulsos regulares, con un período que va desde os segundos hasta los milisegundos. El púlsar es el resultado de una supernova, que deja una estrella muy colapsada denominada estrella de neutrones. La masa de la estrella de neutrones es comparable a la masa de la estrella original, aunque está compactada en un radio de unos pocos kilómetros, y que gira sobre sí misma a una velocidad angular enorme, desde 1 rev/s hasta 1000 rev/s. Esta elevada velocidad de rotación es debida a la conservación del momento angular durante el colapso. (a) Estime la velocidad de rotación del Sol si colapsase formando una estrella de neutrones con un radio de 10 km. Ya que el Sol no es una esfera uniforme de gas, su momento de inercia viene dado por la fórmula I = 0.059MR^2. Supóngase que la estrella de neutrones es esférica y posee una distribución uniforme de masa. (b) ¿Qué es mayor, la energía cinética de rotación del Sol, o de la estrella de neutrones? ¿De donde procede la diferencia de energía? Datos: masa del Sol = 2×10^{30}kg; radio del Sol = 7×10^8 m; velocidad angular de rotación del Sol 1rev/25días=0.04rev/día.

(a) Teniendo en cuenta la conservación del momento angular antes y después del colapso

$$L_{neutrones} = L_{Sol} \quad \Rightarrow \quad I_{neutrones}\omega_{neutrones} = I_{Sol}\omega_{Sol}\,.$$

Para el Sol, usamos la fórmula aproximada del enunciado, y para la estrella de neutrones, la fórmula para el momento de inercia de una esfera que gira alrededor de un eje que pasa por su centro, luego

$$\omega_{neutrones} = \frac{I_{Sol}}{I_{neutrones}}\omega_{Sol} = \frac{0.059MR_{Sol}^2}{\frac{2}{5}MR_{neutrones}^2}\omega_{Sol} = \frac{5\cdot 0.059}{2}\left(\frac{R_{Sol}}{R_{neutrones}}\right)^2\omega_{Sol}$$

$$= \frac{5\cdot 0.059}{2}\left(\frac{7\times 10^8\ \mathrm{m}}{10^4\ \mathrm{m}}\right)^2 0.04\,\mathrm{rev/día} = 2.89\times 10^7\ \mathrm{rev/día}$$

que pasado a radianes por segundo es

$$\omega_{neutrones} = 2.89\times 10^7\ \frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{día}}\left(\frac{1\,\mathrm{día}}{86400\,\mathrm{s}}\right)\left(\frac{2\pi}{1\,\mathrm{rev}}\right) = 2101.7\,\mathrm{rad/s}\,.$$

Esta frecuencia angular corresponde a un período

$$T_{neutrones} = \frac{2\pi}{\omega_{neutrones}} = \frac{2\pi}{2101.7\,\mathrm{s}^{-1}} \approx 0.003\,\mathrm{s}\,,$$

y por tanto es *del orden de los milisegundos*.

(b) Calculemos las energías cinéticas de rotación del Sol y de la estrella de neutrones. Despreciando el hecho de que el Sol no es un objeto rígido, tenemos que

$$\frac{K_{neutrones}}{K_{Sol}} \approx \frac{\frac{1}{2}I_{neutrones}\omega_{neutrones}^2}{\frac{1}{2}I_{Sol}\omega_{Sol}^2} = \frac{\frac{2}{5}MR_{neutrones}^2}{0.059MR_{Sol}^2}\left(\frac{\omega_{neutrones}}{\omega_{Sol}}\right)^2 \approx 6.78\left(\frac{R_{neutrones}}{R_{Sol}}\right)^2\left(\frac{\omega_{neutrones}}{\omega_{Sol}}\right)^2 =$$

$$= 6.78\left(\frac{10^4}{7\times 10^8\ \mathrm{m}}\right)^2\left(\frac{2.89\times 10^7\ \mathrm{rev/día}}{0.04\,\mathrm{rev/día}}\right)^2 = 7.22\times 10^8$$

En conclusión, la energía cinética del Sol ¡¡se incrementa en un factor del orden de 10^9!! Esta energía no surge espontáneamente de la nada, ya que la energía total debe conservarse. En realidad, prácticamente todo el porcentaje de *esta energía viene de la disminución de energía potencial gravitatoria de la estrella cuando colapsa*.

5. El momento de inercia de la Tierra respecto a su eje de rotación es aproximadamente igual a 8.03 × 10^{37} kg·m^2. (a) Puesto que la Tierra es casi esférica, supondremos que su momento de inercia puede escribirse como $I = CMR^2$, donde C es una constante adimensional, M = 5.98× 10^{24} kg es la masa de la Tierra, y R = 6370 km. Determine el valor de la constante C. (b) Si la masa de la Tierra estuviese distribuida uniformemente, C sería igual a 2/5. Comparando con el valor de C calculado en el apartado (a), induzca si la densidad de la Tierra es mayor cerca del núcleo o cerca de la corteza.

(a) Despejando de la fórmula

$$C = \frac{I}{MR^2} = \frac{8.03\times10^{37}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}}{(5.98\times10^{24}\ \mathrm{kg})(6.37\times10^{6}\ \mathrm{m})^2} = 0.331\,.$$

(b) Comparando, $C < 2/5 = 0.4$, por lo que el momento de inercia de la Tierra es menor que el que le correspondería si fuese una esfera perfectamente homogénea. De este resultado, *podemos inferir que la Tierra es más densa en el núcleo*.